

EQUATIONS, INEQUATIONS

I. Equations

Définition 1 : Une **équation** est une égalité de deux expressions (appelées les **membres** de l'équation) dans laquelle apparaissent des nombres inconnus désignés le plus souvent par des lettres (les **inconnues**)

Définition 2 : **Résoudre** une équation, c'est déterminer toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue (ou les inconnues) pour que l'égalité soit vraie. Ces valeurs sont les **solutions** (ou les racines) de l'équation.

Exemple :

$$x^2 + 1 = 3 - x$$

membre de gauche membre de droite

Vérifier que $x = -2$ est solution de l'équation

Comme $x = -2$: $x^2 + 1 = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ et $3 - x = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

On a bien $x = -2$ solution de l'équation

1) Equations du premier degré à une inconnue

Définition 3 : Une **équation du premier degré à une inconnue** est une égalité dans laquelle une quantité est inconnue et son exposant est égal à 1.

Exemple1 : $3x + 7 = 2 \times (1 - x)$ ici l'inconnue est x

a. Méthode de résolution

Objectif : « isoler x » dans l'un des deux membres à l'aide des propriétés suivantes :

Propriété 1 : On ne change pas les solutions d'une équation en *ajoutant* (ou en *soustrayant*) un même nombre à ses deux membres.

Autrement dit : si $a = b$ et c un nombre alors $a + c = b + c$

Propriété 2 : On ne change pas les solutions d'une équation en *multipliant* (ou en *divisant*) ses deux membres par un même nombre **non nul**

Autrement dit : si $a = b$ et $c \neq 0$, alors $a \times c = b \times c$

Remarques :

- Si on multiplie par un nombre nul, on change l'ensemble solution.
- Il existe des équations qui n'ont **pas de solutions** telles que $0x = 9$
- L'équation $0x = 0$ a une **infinité de solutions**

b. Résolution de l'exemple1

	$3x + 7 = 2 \times (1 - x)$
On développe le second membre :	$3x + 7 = 2 - 2x$
On regroupe « les termes en x » dans le 1 ^{er} membre (Propriété1 : on ajoute 2x aux deux membres)	$5x + 7 = 2$
On regroupe « les termes sans x » dans le 2 nd membre (Propriété1 : on retranche 7 aux deux membres)	$5x = -5$
Propriété2 : On divise par 5 les deux membres	$x = -1$

Bilan : l'équation $3x + 7 = 2 \times (1 - x)$ admet une seule solution $x = -1$

2) Equations produit :

Définition 4 : Une **équation produit** est de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ (Il peut y avoir plus de deux facteurs)

Pour résoudre ce type d'équation on va avoir recours au théorème suivant :

Théorème 1 : Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul
Autrement dit, si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

Donc : $(ax + b)(cx + d) = 0$ est vraie lorsque $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$

Et on est ramené au paragraphe précédent.

Exemple2 : Résoudre l'équation $(6x + 4)(3x - 8) = 0$

Puisqu'un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul

$$(6x + 4)(3x - 8) = 0 \Leftrightarrow 6x + 4 = 0 \text{ ou } 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{8}{3}$$

Les solutions de l'équation sont $x = -\frac{2}{3}$ et $x = \frac{8}{3}$

Exemple3 : Résoudre l'équation $25x^2 - 16 = 0$

L'astuce consiste à factoriser pour faire apparaître une équation produit. On est alors ramené à la résolution de $(5x - 4)(5x + 4) = 0$. D'où...

Les solutions de l'équation sont $x = -\frac{4}{5}$ et $x = \frac{4}{5}$

Exemple4 : Résoudre l'équation $(2x - 3)(x - 1) = (2x - 3)(x + 2)$

L'astuce consiste toujours à se ramener à une équation produit.

En utilisant la règle1, on peut écrire : $(2x - 3)(x - 1) - (2x - 3)(x + 2) = 0$

Il ne reste plus qu'à factoriser : $(2x - 3)(-3) = 0$

La solution de l'équation est $x = \frac{3}{2}$

II. Inéquations

Définition 5 : Une **inéquation** est une inégalité entre deux expressions dans laquelle apparaissent des nombres inconnus désignés le plus souvent par des lettres (les **inconnues**)

Définition 6 : **Résoudre** une inéquation, c'est déterminer toutes les valeurs que peut prendre l'inconnue (ou les inconnues) pour que l'inégalité soit vraie. Ces valeurs sont les **solutions** (ou les racines) de l'inéquation.

1) Inéquations du premier degré à une inconnue

Définition 7 : Une **inéquation du premier degré à une inconnue** est une inégalité dans laquelle une quantité est inconnue et son exposant est égal à 1.

Exemple5 : $x + 7 < 4x + 13$

a. Méthode de résolution :

Objectif : « isoler x » dans l'un des deux membres à l'aide des propriétés suivantes :

Propriété 1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en *ajoutant* (ou en *soustrayant*) un même nombre a ses deux membres.

Autrement dit : si $a < b$ et c un nombre alors $a + c < b + c$

Propriété 2 : On ne change pas les solutions d'une équation en *multipliant* (ou en *divisant*) ses deux membres par un même nombre **strictement positif**

Autrement dit : si $a < b$ et $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$

Propriété 3 : On ne change pas les solutions d'une équation en *multipliant* (ou en *divisant*) ses deux membres par un même nombre **strictement négatif** à condition de **changer le sens de l'inéquation**.

Autrement dit : si $a < b$ et $c < 0$, alors $a \times c > b \times c$

b. Résolution de l'exemple5 :

	$x + 7 < 4x + 13$
On regroupe « les termes en x » dans le 1 ^{er} membre (propriété1 : on soustrait 4x aux deux membres)	$-3x + 7 < 13$
On regroupe « les termes sans x » dans le 2 nd membre (propriété1 : on soustrait 7 aux deux membres)	$-3x < 6$
Propriété3 : on divise par -3 les deux membres (et on oublie pas de changer le sens de l'inégalité !!!)	$x > -2$

c. Représentation des solutions sur une droite graduée :

On a vu au b. que les solutions de l'équation $x + 7 < 4x + 13$ sont tous les x strictement supérieurs à -2

On peut représenter ces solutions sur une droite graduée : (Par convention, on va rayer la partie qui ne convient pas)



Le **crochet** est orienté dans le sens opposé des solutions pour indiquer que -2 n'est pas solution.

Remarque : faire attention à la façon dont est tournée le crochet selon que la valeur extrême conviennent ou pas.